Управление образования
Одесской областной государственной администрации

Ришельевский лицей

ОБЛАСТНАЯ ЛЕТНЯЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ

Задание по математике (*группа* “Б”)

---

1. Найдите наибольшее значение выражения $\sqrt[4]{1-a}-\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{1+a}$ при $a\in[0;1]$.

2. На сторонах BC, AC и AB равнобедренного треугольника ABC $(AB=BC)$ выбраны точки A_1, B_1 и C_1 соответственно таким образом, что $\angle BC_1A_1=\angle CA_1B_1=\angle BAC$. Докажите, что если P – точка пересечения отрезков BB_1 и CC_1, то около четырёхугольника AB_1PC_1 можно описать окружность.

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых во множестве решений неравенства $\sqrt{a^2-x^4}+a>x$ содержится ровно два различных целых числа.

4. Докажите, что для любого натурального числа n выполняется неравенство
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(n+\frac{1}{n}\right)\le 2\cdot(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n).$$

5. На доске написано натуральное число. За один шаг разрешается заменять записанное на доске число его суммой с любым из его же натуральных делителей. Какое наименьшее количество таких шагов является достаточным для того, чтобы из любого исходного числа можно было на доске получить число, кратное числу 683 ?

6. Любой ли трёхгранный угол можно пересечь плоскостью так, чтобы в сечении образовался равносторонний треугольник ?

7. Пусть $P(x)=x^2+x+1$. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных чисел n, что произведение $P(1)P(2)\cdot\ldots\cdot P(n)$ не делится нацело на $P(n+1)$.

8. Докажите, что $\mathrm{tg}\frac{4\pi}{11}+4\sin\frac{\pi}{11}=\sqrt{11}$.

9. Решите систему уравнений
$$\begin{cases}2x^2y-xy^5z=z^2,\\ xz+3y^4z^2=10x^2y^5,\\ 5y^4z+3xy^8z^2=2x^2.\end{cases}$$

10. Докажите, что среди 2000 человек обязательно найдутся двое с чётным числом общих знакомых. (В этой задаче знакомство считается “взаимным”: человек A знаком с человеком B тогда и только тогда, когда человек B знаком с человеком A.)

26 июня – 9 июля 2000 года