Управление образования
Одесской областной государственной администрации

Ришельевский лицей

ОБЛАСТНАЯ ЛЕТНЯЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

КОМПЛЕКСНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ, ФИЗИКЕ И БИОЛОГИИ

Задание по математике

Задачи №№ 1–5 предназначены для учащихся, окончивших 7 класс
Задачи №№ 6–10 предназначены для учащихся, окончивших 8 класс
Задачи №№ 11–15 предназначены для учащихся, окончивших 9 класс
Задачи №№ 15–19 предназначены для учащихся, окончивших 10 класс

1. За два года завод снизил объём выпускаемой продукции на 51 %. При этом известно, что каждый год объём выпуска продукции снижался на одно и то же число процентов. На сколько именно ? Ответ обоснуйте.

2. Барон Мюнхгаузен хвастался, что он сможет “*отметить*” (то есть – нарисовать) на плоскости шесть точек и несколько прямых так, что через каждые две “*отмеченные*” точки пройдёт “*отмеченная*” прямая, а через каждую из “*отмеченных*” точек пройдет ровно три “*отмеченных*” прямых. Правду ли говорил барон ? Ответ обоснуйте.

3. Докажите, что число $M = 2000 \cdot 2001 \cdot 2002 \cdot 2004 \cdot 2005 \cdot 2006 + 36$ является квадратом натурального числа.

4. Придумайте такое натуральное число, которое делится нацело на 2001, и при этом сумма цифр его десятичной записи также делится на 2001.

5. Пусть отрезок CD – биссектриса равнобедренного треугольника ABC с основанием AC. На прямой AC взята такая точка E, что $\angle EDC = 90°$. Докажите, что $CE = 2 \cdot AD$.

6. Существует ли такое большее единицы натуральное число, при делении на которое числа 1108, 1453, 1844 и 2281 дают одинаковый остаток ? Ответ обоснуйте.

7. Упростите выражение

$$\frac{x^2 + xy + y^2}{1 + xy + x^2y^2},$$

если известно, что $x + y - xy = 1$.

8. Расположите девять попарно различных натуральных чисел в клетках таблицы размера 3×3 так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце таблицы произведение чисел равнялось 2000.

9. Пусть AF – медиана треугольника ABC, а точка D – середина отрезка AF. Пусть прямая CD пересекает сторону AB в точке E. Докажите, что если $BD = BF$, то $AE = DE$.

10. Несколько государственных чиновников получили одинаковую премию за многолетнюю добросовестную службу. После этого время от времени кто-нибудь из них брал часть своих денег и раздавал их поровну остальным чиновникам. Вскоре обнаружилось, что у одного из чиновников осталось 24 копейки, а ещё у одного – 17 копеек. Сколько же было чиновников ? Ответ обоснуйте.

11. Пусть отрезки AL и BM – биссектрисы треугольника ABC. Известно, что одна из точек пересечения окружностей, описанных около треугольников ACL и BCM лежит на стороне AB. Найдите величину угла ACB.

12. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} xy + x + y = 80, \\ yz + y + z = 80, \\ xz + x + z = 80. \end{cases}$$

13. Можно ли расположить шестнадцать попарно различных натуральных чисел в клетках таблицы размера 4×4 так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце таблицы произведение чисел равнялось 2000 ?

14. Найдите наибольшее значение выражения $\sqrt{2x+1} - x$ при $x \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

15. Докажите, что

$$\mathrm{tg}10^\circ + \mathrm{tg}40^\circ + \mathrm{tg}70^\circ + \mathrm{tg}100^\circ + \mathrm{tg}130^\circ + \mathrm{tg}160^\circ = -2\sqrt{3}.$$

16. Дан остроугольный треугольник ABC, в котором $\angle CBA = 30^\circ$. Пусть M – точка, симметричная точке пересечения высот треугольника ABC относительно середины стороны AC. Докажите, что $BM = 2 \cdot AC$.

17. Все клетки доски размера 11×11 покрашены в белый цвет. За один шаг разрешается выбрать любые четыре ***белые*** клетки, расположенные в вершинах квадрата со сторонами, параллельными сторонам доски, и две из этих клеток, находящиеся в таком квадрате в концах диагонали, перекрасить в чёрный цвет. Какое наибольшее количество чёрных клеток можно получить на доске при помощи описанных операций ?

18. Пусть $x_0 > x_1 > \ldots > x_{999} > x_{1000} \geq 1$. Докажите, что выполняется неравенство

$$x_0 + \frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + \ldots + \frac{1}{x_{999} - x_{1000}} \geq 2001.$$

19. Существует ли такая отличная от постоянной функция f, что при всех $x \notin \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi m \,\middle|\, m \in Z \right\}$ выполняется равенство $f(\mathrm{tg}\,x) = f\left(\frac{1}{\cos x}\right)$?

26 июня – 9 июля 2000 года