**Управление образования и науки**
**Одесской областной государственной администрации**

**Ришельевский лицей**

## V ЛЕТНЯЯ ЕСТЕСТВЕННО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

## КОМПЛЕКСНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ, ФИЗИКЕ, ХИМИИ И БИОЛОГИИ

### Задание по математике

---

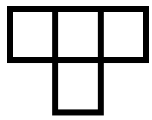
Задачи №№ 1–5 предназначены для учеников, окончивших 8 класс
Задачи №№ 4–8 предназначены для учеников, окончивших 9 класс
Задачи №№ 8–12 предназначены для учеников, окончивших 10 класс

1. Изобразите на координатной плоскости $xOy$ множество всех точек, координаты которых удовлетворяют равенству $\sqrt{(x+3)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-5)^2+(y+1)^2}=\sqrt{73}$.

2. Некое натуральное число $a$ делили на 3, на 18 и на 48. При этом оказалось, что сумма остатков составляет 39. Какой же остаток получается при делении этого числа $a$ на 3 ?

3. Внутри треугольника $ABC$ отмечены две различные точки — $P$ и $Q$ — таким образом, что отрезки $AQ$ и $CP$ равны и пересекаются, причём $\angle CAQ=\angle ACP$, $\angle CPB=\angle AQB$. Докажите, что треугольник $ABC$ является равнобедренным.

4. Докажите, что если шахматная доска размера $16\times16$ разрезана на **Т**-тетрамино (Т-тетрамино — четырёхклеточная фигурка изображённого на рисунке вида), то найдётся прямая, идущая по линиям сетки и “рассекающая” не менее восьми фигурок.



5. Известно, что $x>y>0$ и $2(x+y)\ge 5\sqrt{xy}$. Докажите, что $x\ge 4y$.

6. В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD$ и $BC$ $\angle A=90^\circ$, $E$ — точка пересечения диагоналей, $F$ — такая точка стороны $AB$, что $\angle BFE=90^\circ$. Докажите, что $\angle DFE=\angle CFE$.

7. Найдите $a+b$, если известно, что $\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)\left(b+\sqrt{b^2+1}\right)=1$.

8. Докажите, что из десятичной записи любого простого числа $p>1000$ можно вычеркнуть одну или две цифры так, чтобы оставшиеся цифры (в том же порядке) образовали составное число.

9. В треугольнике $ABC$ $AB=BC$. На стороне $AB$ выбрана отличная от вершин точка $M$, а на продолжении стороны $AC$ за точку $A$ — такая точка $K$, что $KM=MC$. Прямая, проходящая через точку $B$ параллельно прямой $AC$, пересекается с прямой $CM$ в точке $P$. Докажите, что прямая $AP$ делит отрезок $KM$ пополам.

10. Найдите наименьшее значение функции $f(x)=\cos 8x+3\cos 4x+3\cos 2x+2\cos x$ $(x\in\mathbb{R})$.

11. Докажите, что если нечётное натуральное число $k$ делится нацело на $\left[\sqrt{k}\right]$, то либо $k$, либо $k+1$ является квадратом натурального числа. (Здесь $[a]$ — целая часть числа $a$, то есть, — наибольшее целое число, не превосходящее $a$.)

12. Сколькими способами из множества $A=\{1;2;3;\ldots;19;20\}$ можно выбрать непустое подмножество так, чтобы среди его элементов не было ни одной тройки последовательных чисел ?

*1–9 июля 2002 года*