Управление образования и науки
Одесской областной государственной администрации

Ришельевский лицей

V ЛЕТНЯЯ ЕСТЕСТВЕННО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

КОМПЛЕКСНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ, ФИЗИКЕ, ХИМИИ И БИОЛОГИИ

Указания к решениям задач по математике

---

1. Данное множество представляет собой отрезок с концами $A(-3;2)$, $B(5;-1)$.

2. Легко показать, что остатки 0 и 2 невозможны. Остаток 1 получается, например, при $a=121$.

3. Несложно доказать, что $APQC$ — равнобокая трапеция. Отсюда, с учётом условия, получаем, что $\angle BQP = \angle BPQ$ и $BQ = BP$. Таким образом, $\triangle AQB = \triangle CPB$.

4. Предположим противное: пусть каждая из 30 прямых, проходящих по линиям сетки, “рассекает” не более *шести* **Т**-тетрамино (нечётное количество таких фигурок прямая “рассекать”, очевидно, не может!). Противоречие получается, если заметить, что каждая из 64 фигурок “рассекается” ровно тремя прямыми.

5. Пусть $t=\sqrt{\dfrac{x}{y}}$. Тогда $2(t-2)\left(t-\dfrac{1}{2}\right)\geq 0$. С учётом условия $t>1$ получаем, что $t\geq 2$.

6. Так как $FB:FA = BE:ED = BC:AD$, то $\triangle FBC \sim \triangle FAD$.

7. Домножая обе части исходного равенства на $\sqrt{a^2+1}-a$, получим, что $a+b=\sqrt{a^2+1}-\sqrt{b^2+1}$. Аналогично, домножив обе части на $\sqrt{b^2+1}-b$, получаем, что $a+b=\sqrt{b^2+1}-\sqrt{a^2+1}$. Таким образом, $a+b=0$.

8. Если $p\equiv S(p)\equiv 1(\operatorname{mod}3)$, то среди цифр числа p есть либо хотя бы одна, сравнимая с 1 по $\operatorname{mod}3$, либо хотя бы две, сравнимые с 2 по $\operatorname{mod}3$. Аналогично разбирается случай $p\equiv S(p)\equiv 2(\operatorname{mod}3)$. (Если в результате получается число вида 00…03, то такая ситуация также легко анализируется.)

9. Проведём через точку M параллельно прямой AC прямую, пересекающую отрезки AP и CB в точках E и F соответственно. Так как $EM = MF$, $KM = CM$, $\angle EMK = \angle FMC$, то $\triangle EKM = \triangle FCM$. Следовательно, $\angle EKM = \angle FCM$, $\angle EKA = \angle FCA = \angle CAM$. Таким образом, четырёхугольник $AKEM$ — параллелограмм. Отсюда и следует утверждение задачи.

10. Представим $f(x)$ в виде $f(x)=(\cos 8x + 2\cos 4x)+(\cos 4x+2\cos 2x)+(\cos 2x + 2\cos x)$. Далее, $\cos 2t + 2\cos t = 2\left(\cos t+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{3}{2}\geq -\dfrac{3}{2}$. Остаётся заметить, что $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=3\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{9}{2}$.

11. Предположим противное. Пусть $m=\left[\sqrt{k}\right]$. Достаточно рассматривать случай $m>1$. Тогда $m^2<k<k+1<(m+1)^2$. Равенство $k=m(m+1)$ невозможно в силу нечётности k, невозможными, как несложно заметить, являются и равенства $k=mt$ при $1\leq t\leq m$ и при $t\geq m+2$.

12. Пусть x_n — количество способов, которыми из множества $\{1;2;...;n\}$ можно выбрать подмножество (возможно, пустое), удовлетворяющее условию задачи. Тогда при $n>3$ несложно установить рекуррентное соотношение: $x_n = x_{n-1}+x_{n-2}+x_{n-3}$. Действительно, количество подмножеств, не содержащих n, равно x_{n-1}; количество подмножеств, содержащих n, но не содержащих $n-1$, равно x_{n-2}; количество подмножеств, содержащих n и $n-1$, равно x_{n-3} (в такие подмножества не входит $n-2$). Учитывая, что $x_1=2$, $x_2=4$, $x_3=7$, с помощью рекуррентного соотношения найдём x_{20}. Интересующее нас число равно $x_{20}-1$.