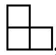
Управление образования и науки
Одесской областной государственной администрации

Ришельевский лицей

VI РЕГИОНАЛЬНАЯ ЛЕТНЯЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ (*группа “А”*)

1. Уравнение $x^3+ax^2+bx+c=0$ имеет три различных действительных корня. Докажите, что разность между наибольшим и наименьшим из его корней не меньше $\sqrt{a^2-3b}$.
2. На доске в строчку написаны 12 звездочек. Два игрока по очереди заменяют любую звездочку произвольной ненулевой цифрой. Второй игрок выигрывает, если число, получившееся после 12 ходов, делится на 13, и проигрывает в противном случае. Кто выигрывает при правильной игре?
3. Два игрока играют в “уголки-квадратики”. У одного игрока мешок уголков , у другого - мешок квадратиков □ (сторона любого квадратика 1). Один из игроков выкладывает несколько (по крайней мере одну) фигурок из своего мешка, а затем другой добавляет по своему выбору несколько своих фигурок. Начинающий выигрывает, если из полученного набора уголков и квадратиков можно составить прямоугольник, и проигрывает в противном случае. Верно ли, что у одного из игроков есть выигрышная стратегия независимо от того, кто начинает игру?
4. Докажите, что число $2002^2+2002^2 2003^2+2003^2$ является полным квадратом.
5. На доске выписано 10 чисел, среди которых, возможно, есть равные. Оказалось, что среднее арифметическое любых трех из этих чисел уже есть среди выписанных. Докажите, что все числа равны.
6. Постройте треугольник по стороне, противолежащему углу и медиане, проведенной к другой стороне.
7. Шесть кругов имеют общую внутреннюю точку. Докажите, что центр одного из них лежит внутри другого.
8. Выписаны 9 чисел — длины биссектрис, высот и медиан некоторого треугольника. Известно, что среди них не более 4 различных. Докажите, что этот треугольник равнобедренный.
9. Доказать, что для всех натуральных n имеем $2^{(2^n-1)n}-1 \vdots (2^n-1)^2$.
10. Доказать, что для любых $x, y, z \ge 0$ $\sqrt{x+\sqrt[3]{y+\sqrt[4]{z}}} \ge \sqrt[32]{xyz}$.

2–10 июля 2003 года

Управление образования и науки
Одесской областной государственной администрации

Ришельевский лицей

VI РЕГИОНАЛЬНАЯ ЛЕТНЯЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ (*группа* “Б”)

1. Выписаны 9 чисел — длины биссектрис, высот и медиан некоторого треугольника. Известно, что среди них не более 4 различных. Докажите, что этот треугольник равнобедренный.
2. Доказать, что для всех натуральных n имеем $2^{(2^n-1)n}-1 \,\vdots\, (2^n-1)^2$.
3. Доказать, что для любых $x, y, z \geq 0$ $\sqrt{x+\sqrt[3]{y+\sqrt[4]{z}}} \geq \sqrt[32]{xyz}$.
4. В телесериале ``Тайна Санта-Барбары" участвуют 36 героев. В каждой новой серии происходит хотя бы одно из следующих событий: либо кто-то из героев узнает тайну, либо кто-то узнает, что кто-то из героев не знает тайны, либо кто-то узнает, что кто-то из героев знает тайну. Может ли показ сериала длиться не менее семи лет, если каждый день будет демонстрироваться новая серия?
5. В выпуклом четырехугольнике ABCD $\angle ABC = 90°$, $\angle \mathrm{BAC} = \angle \mathrm{CAD}$, $\mathrm{AC} = \mathrm{AD}$, DH — высота треугольника ACD. В каком отношении прямая BH делит отрезок CD?
6. Даны такие положительные числа x, y, z, что $xyz = 1$. Докажите, что
$$\frac{1}{x^3+2}+\frac{1}{y^3+2}+\frac{1}{z^3+2} \leq 1.$$
7. Для данного натурального числа N построим две последовательности (a_n) и (b_n): $a_1 = b_1 = N$, $a_{n+1} = a_n + S(a_n)$, $b_{n+1} = b_n + \Pi(b_n)$, где $S(m)$ — сумма цифр, $\Pi(m)$ — произведение цифр натурального m. Докажите, что при каждом N найдется такой номер k, что $a_k > b_k$.
8. На сторонах CD и DA параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки E и F. Пусть K — точка пересечения отрезков AE и CF. Докажите, что если площади треугольников AKF и CKE равны, то точка K лежит на диагонали BD.
9. Функция удовлетворяет функциональному уравнению $4f(f(x)) = 2f(x) + x$. Докажите, что $f(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.
10. Сумма положительных чисел a, b и c меньше π, и эти числа являются длинами сторон некоторого треугольника. Докажите, что синусы этих углов также являются длинами сторон некоторого треугольника.

2–10 июля 2003 года

Управление образования и науки
Одесской областной государственной администрации

Ришельевский лицей

VI РЕГИОНАЛЬНАЯ ЛЕТНЯЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ (*группа* “В”)

1. В выпуклом четырехугольнике ABCD $\angle ABC = 90°$, $\angle BAC = \angle CAD$, $AC = AD$, DH — высота треугольника ACD. В каком отношении прямая BH делит отрезок CD?
2. Даны такие положительные числа $x,\ y,\ z$, что $xyz = 1$. Докажите, что
$$\frac{1}{x^3+2}+\frac{1}{y^3+2}+\frac{1}{z^3+2}\le 1.$$
3. Для данного натурального числа N построим две последовательности (a_n) и (b_n): $a_1 = b_1 = N$, $a_{n+1} = a_n + S(a_n)$, $b_{n+1} = b_n + \Pi(b_n)$, где $S(m)$ — сумма цифр, $\Pi(m)$ — произведение цифр натурального m. Докажите, что при каждом N найдется такой номер k, что $a_k > b_k$.
4. На сторонах CD и DA параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки E и F. Пусть K — точка пересечения отрезков AE и CF. Докажите, что если площади треугольников AKF и CKE равны, то точка K лежит на диагонали BD.
5. Функция удовлетворяет функциональному уравнению $4f\left(f(x)\right) = 2f(x) + x$. Докажите, что $f(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.
6. Сумма положительных чисел a, b и c меньше π, и эти числа являются длинами сторон некоторого треугольника. Докажите, что синусы этих углов также являются длинами сторон некоторого треугольника.
7. Дано 2003 множества, причем каждое из них содержит 45 элементов и любые два имеют ровно один общий элемент. Докажите, что все эти множества имеют общий элемент.
8. Доказать, что уравнение $4xy - x - y = z^2$ не имеет решений в натуральных числах и имеет бесконечно много решений в целых.
9. Пусть a_k – положительный корень уравнения $x^k - x = 1$ $(k \in \mathbb{N})$. Доказать, что $a_{25} < \dfrac{a_{20} + a_{30}}{2}$.
10. Пусть P – многочлен степени n $(n \ge 5)$ с целыми коэффициентами, который имеет n попарно различных целых корней, причем $P(0) = 0$. Докажите, что любой целый корень уравнения $P\left(P(x)\right) = 0$ является также корнем многочлена P.

2–10 июля 2003 года