Управління освіти і науки
Одеської обласної державної адміністрації
Рішельєвський ліцей
VII ОБЛАСНА ЛІТНЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ШКОЛА
МАТЕМАТИЧНИЙ БІЙ

Група А

1. П'ятизначні числа a та b мають таку властивість: якщо до числа b приписати зліва число a, то отримане десятизначне число ділиться на ab. Знайдіть усі такі числа.
2. Знайдіть усі пари натуральних чисел $(m;n)$ такі, що mn ділиться на 3, але клітчастий прямокутник розміру $m \times n$ не можна розрізати за лініями сітки на „куточки" з трьох клітинок.
3. На острів, населений двома племенами, прибув новий губернатор. Губернатору відомо, що тубільці одного з племен завжди кажуть правду, а тубільці іншого племені завжди брешуть. Самі тубільці знають кожен про кожного, хто з якого племені. Губернатор також хоче це встановити. Для цього він має право один раз на день обирати серед населення острова довільну групу (можливо, і всіх жителів), та запитувати у кожного члена цієї групи кількість „лжеців" у цій групі. Чи зможе губернатор за два дні довідатись про кожного жителя острова, з якого він племені?
4. У трикутнику ABC $\angle C = 90^\circ; CM -$ медіана; K і $N -$ точки дотику кола, вписаного у трикутник CAM, до сторін AC і AM відповідно. Знайдіть гострі кути трикутника ABC, якщо KN паралельно CM.
5. На дошці записано число 1. Дозволяється збільшити це число на будь-яку цілу кількість відсотків від 1 до 100. Якщо при цьому отримано ціле число, його теж можна записати на дошці. Далі можна обирати будь-яке з вже записаних чисел, збільшувати його на цілу кількість відсотків від 1 до 100 і т. д. Знайдіть найменше натуральне число, яке не може бути отримано за допомогою таких дій.
6. П'ять шахистів зіграли однокруговий турнір (кожний зіграв з кожним рівно один раз). У підсумку усі набрали різну кількість очок. Той, хто зайняв перше місце, жодного разу не програв; той, хто зайняв друге місце, не мав жодної нічиї, а той, хто зайняв четверте місце, жодного разу не виграв. Визначте результати кожної партії.
7. У клітинках квадрата $n \times n; n \geq 2$ записано натуральні числа. Для кожної пари клітинок, що мають хоча б одну спільну точку, знайшли модуль різниці чисел в цих клітинках. Доведіть, що найбільша серед цих різниць не менша, ніж $n+1$. Чи може вона дорівнювати $n+1$?
8. Визначте кути трикутника, якщо у ньому центри вписаного та описаного кіл симетричні відносно однієї з сторін трикутника.
9. $a+b+c=0$. Доведіть, що $a^3+b^3+c^3=3abc$.
10. Знайдіть усі восьмизначні числа n, для яких число $9n$ записується тими ж цифрами, але у зворотньому порядку.