**Глава 9**

# ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ

## § 74. АБСОЛЮТНАЯ И ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ

**Абсолютная погрешность.** При всяком измерении физическая величина сравнивается с однородной величиной, принятой за единицу. Если записано, что масса тела равна 5 кг, то это именованное число (значение массы тела) есть произведение числового значения физической величины (5) на единицу массы (кг). Измерить массу тела — это и значит определить, во сколько раз масса тела отличается от массы эталона.

Конечно, сравнение с эталоном происходит косвенно. Например, массу данного тела мы сравниваем с массой гирь. Следовательно, посредством специальных, достаточно сложных процедур необходимо «проградуировать» гири весов, сравнив их с эталоном. При этом массы гирь не точно равны так называемым *номинальным* значениям, которые на них написаны. И хотя нельзя сказать, чему равно истинное значение массы, однако завод-изготовитель гарантирует тот интервал значений, внутри которого находится истинное значение массы гири.

Мы видим, что в физике и технике не существует абсолютно точных приборов и других средств измерения, следовательно, нет и абсолютно точных способов измерения. Даже основные физические константы известны с определенными погрешностями. Например, постоянная Авогадро, по последним данным, равна $N_A = (6{,}022045 \pm 0{,}000031) \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$. Это значит, что истинное значение неизвестно, но достоверно (с вероятностью, близкой к 1) можно утверждать, что оно принадлежит интервалу значений $6{,}022014 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1} < N_A < 6{,}022076 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$. Процесс измерения только тогда считается завершенным, когда указано не только число $x_{изм}$, которое принято за результат измерения, но и число $\Delta x$, которое позволяет определить интервал $|x_{изм} - \Delta x;\ x_{изм} + \Delta x|$, достоверно (с вероятностью, близкой к 1) содержащий неизвестное экспериментатору истинное значение измеряемой величины (рис. 9.1). Величина $\Delta x$ называется *границей абсолютной погрешности*. Она показывает, насколько неизвестное экспериментатору истинное значение измеряемой величины может отличаться от измеренного значения.

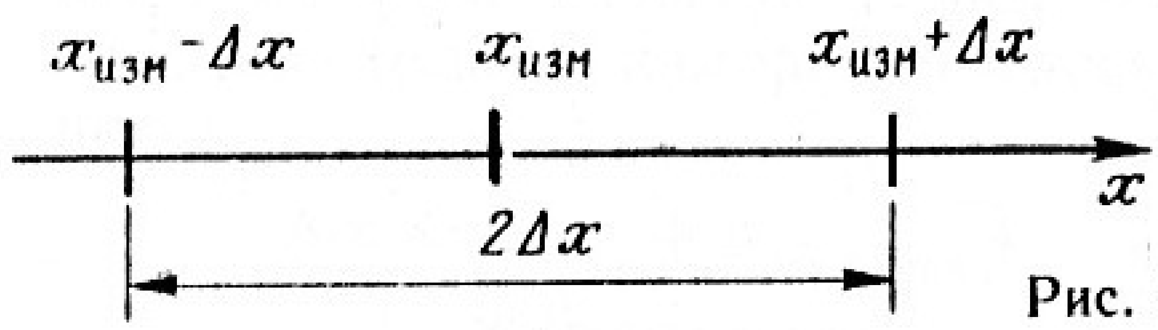



Рис. 9.1

Граница абсолютной погрешности не в полной мере характеризует измерение. Пусть, например, в результате измерений установлено, что длина стола равна $l = (100 \pm 1)$ см, а толщина его крышки $d = (2 \pm 1)$ см. Хотя граница абсолютной погрешности измерений в этих двух случаях одинакова, ясно, что качество измерений в первом случае выше.

**Относительная погрешность.** Качество измерений характеризуется *относительной погрешностью* $\varepsilon = \frac{\Delta x}{x_{изм}}$, равной отношению абсолютной погрешности к значению величины, получаемой в результате измерения.

Знание абсолютных погрешностей необходимо при выполнении вычислений, при построении графиков, при использовании таблиц.

После того как вычислена абсолютная погрешность, ее значение обычно округляется до одной значащей цифры. После этого и результат измерения записывается с числом десятичных знаков, не большим, чем их имеется в абсолютной погрешности. Например, запись $v=(0{,}56032\pm\pm 0{,}028)$ м/с не совсем удачна. Желательно записать: $\Delta v=0{,}03$ и $v==(0{,}56\pm 0{,}03)$ м/с.

**Погрешности и построение графиков.** При построении графиков следует иметь в виду, что по результатам опытов мы получаем не точку, а прямоугольник со сторонами $2\Delta x$ и $2\Delta y$ (рис. 9.2). Поэтому при построении графиков необходимо проводить плавную линию так, чтобы примерно одинаковое число точек оказалось по разные стороны от кривой.

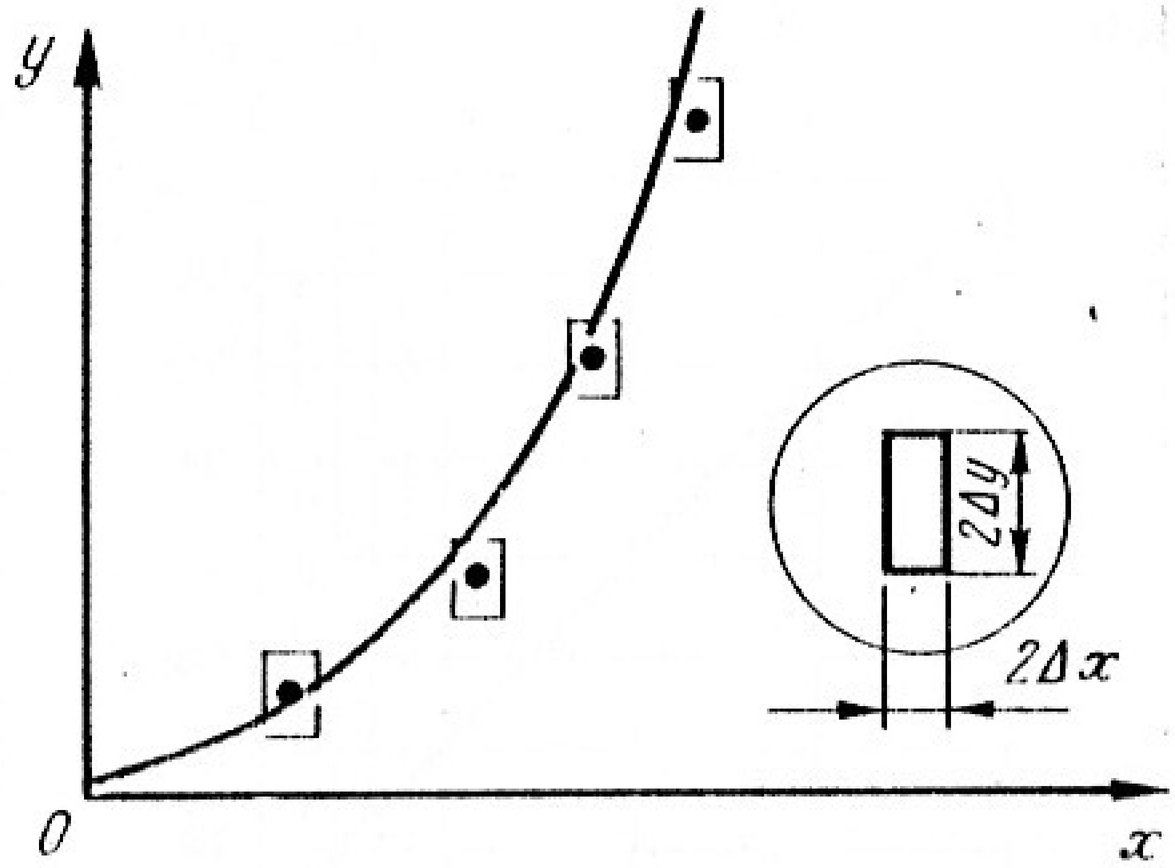



Рис. 9.2

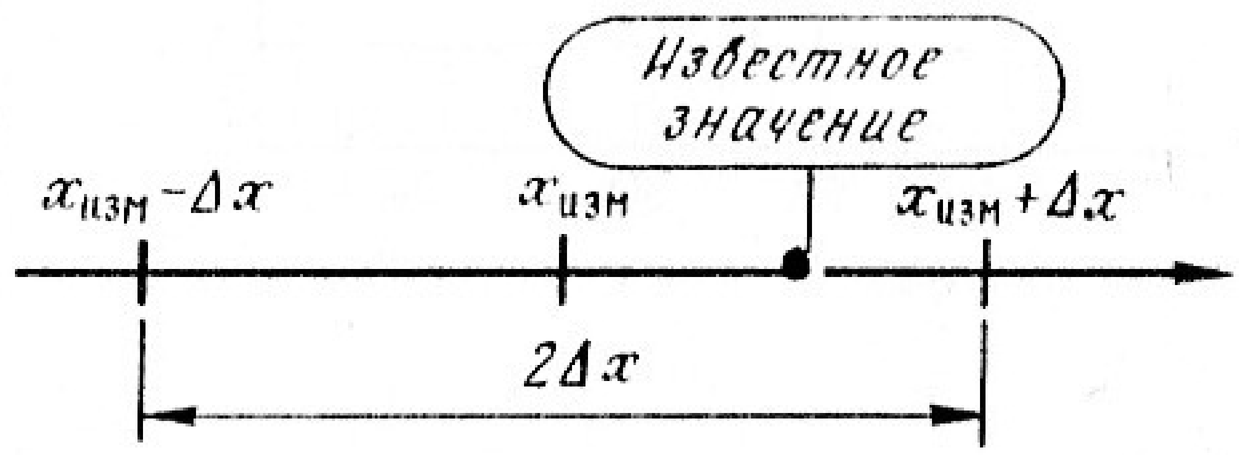



Рис. 9.3

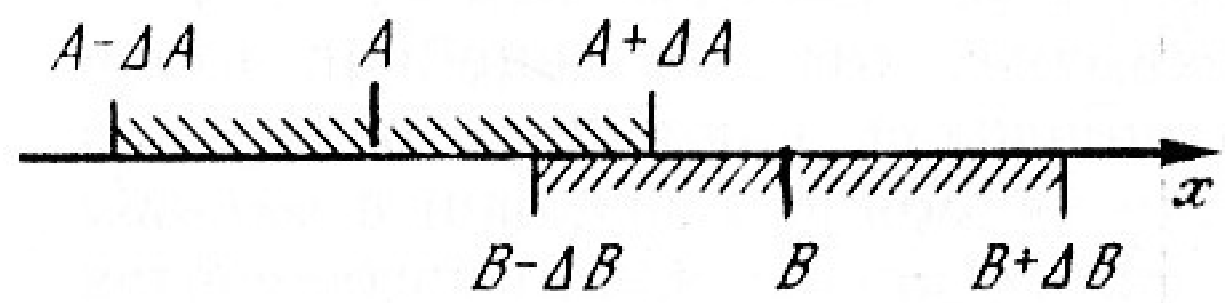



Рис. 9.4

При пользовании таблицами следует иметь в виду, что погрешности приведенных значений имеют границу, равную половине разряда последней цифры. Например, если в таблице указано, что $\rho=2{,}7\cdot 10^3$ кг/м$^3$, то последняя цифра находится в разряде десятых (цифра 7). Следовательно, $\Delta\rho=\frac{0{,}1}{2}\cdot 10^3$ кг/м$^3=0{,}05\times\times 10^3$ кг/м$^3=50$ кг/м$^3$; т. е. $2{,}65\times\times 10^3$ кг/м$^3\leqslant\rho\leqslant 2{,}75\cdot 10^3$ кг/м$^3$.

Погрешность измерения следует учитывать, если вы хотите убедиться в достоверности измерения физической величины, действительное значение которой известно. В этом случае необходимо убедиться в принадлежности известного значения интервалу $|x_{изм}\pm\Delta x|$ (рис. 9.3). Если проверяется закон $A=B$, то проверка достоверна, если интервалы $|A\pm\Delta A|$ и $|B\pm\Delta B|$ имеют общие точки (рис. 9.4), т. е. частично или полностью перекрываются.

## ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**74.1.** Современное значение модуля заряда электрона равно $e=(1{,}6021892\pm 0{,}0000046)\times\times 10^{-19}$ Кл. Запишите интервал значений, которому принадлежит истинное значение заряда электрона. Определите относительную погрешность, с которой известно значение заряда.

**74.2.** В процессе вычислений было получено значение величины $x=27{,}47\pm 0{,}18$. Как правильно записать результат?

74.3. Модуль вектора перемещения равен $s=25{,}4$ км. Запишите результат в Международной системе единиц. Определите абсолютную и относительную погрешности.

74.4. В таблице указано, что плотность меди равна $\rho=8{,}9\cdot10^3$ кг/м³. Запишите интервал значений, которому принадлежит истинное значение плотности меди. Какова относительная погрешность, с которой задана плотность меди в таблице?

## § 75. ПОГРЕШНОСТИ ПРЯМЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

**Погрешности прибора и отсчета.** Способ определения значения измеряемой величины и абсолютной погрешности зависит от вида измерений и их методики. Измерения, в которых результат находится непосредственно в процессе считывания со шкалы (или показаний цифрового прибора), называются *прямыми*.

Погрешность прямого измерения складывается из погрешности средства измерения (прибора, инструмента) $\Delta_{пр}$ и погрешности отсчета $\Delta_{отсч}$: $\Delta=\Delta_{пр}+\Delta_{отсч}$. Погрешность средства измерения определяется на заводе-изготовителе. Например, динамометр для лабораторных работ имеет погрешность $\Delta_д=0{,}05$ Н, амперметр и вольтметр для лабораторных работ — погрешности $\Delta_A=0{,}05$ А и $\Delta_B=0{,}15$ В соответственно.

**Погрешности электроизмерительных приборов.** В общем случае каждый электроизмерительный прибор имеет класс точности $\gamma$, который позволяет определить погрешность этого прибора. Пусть, например, класс точности миллиамперметра $\gamma=4$, а предел измерения этим прибором равен 250 мА; тогда абсолютная погрешность прибора составляет 4% от 250 мА, т. е. 10 мА на всей шкале. В общем виде

$$\Delta_{пр}=\frac{\gamma M}{100}, \qquad (75.1)$$

где $M$ — предел измерения с помощью данного прибора.

Погрешность отсчета не превосходит половины цены деления $\Delta_{отсч}\leqslant c/2$, где $c$ — цена деления шкалы. Итак, погрешность прямого измерения

$$\Delta=\Delta_{пр}+\frac{c}{2}. \qquad (75.2)$$

**Погрешность взвешивания.** Несколько сложнее определить погрешность при использовании весов. Приходится, во-первых, учитывать погрешность, которая зависит от нагрузки, и погрешность гирь. Во-вторых, следует учесть еще погрешность подбора гирь. Эта погрешность аналогична погрешности отсчета и равна половине массы наименьшей гири, лежащей на весах (либо выводящей весы из равновесия). Таким образом, при прямом измерении массы на весах:

$$\Delta m=\Delta_{весов}+\Delta_{всех\ гирь}+\Delta_{подбора\ гирь}. \qquad (75.3)$$

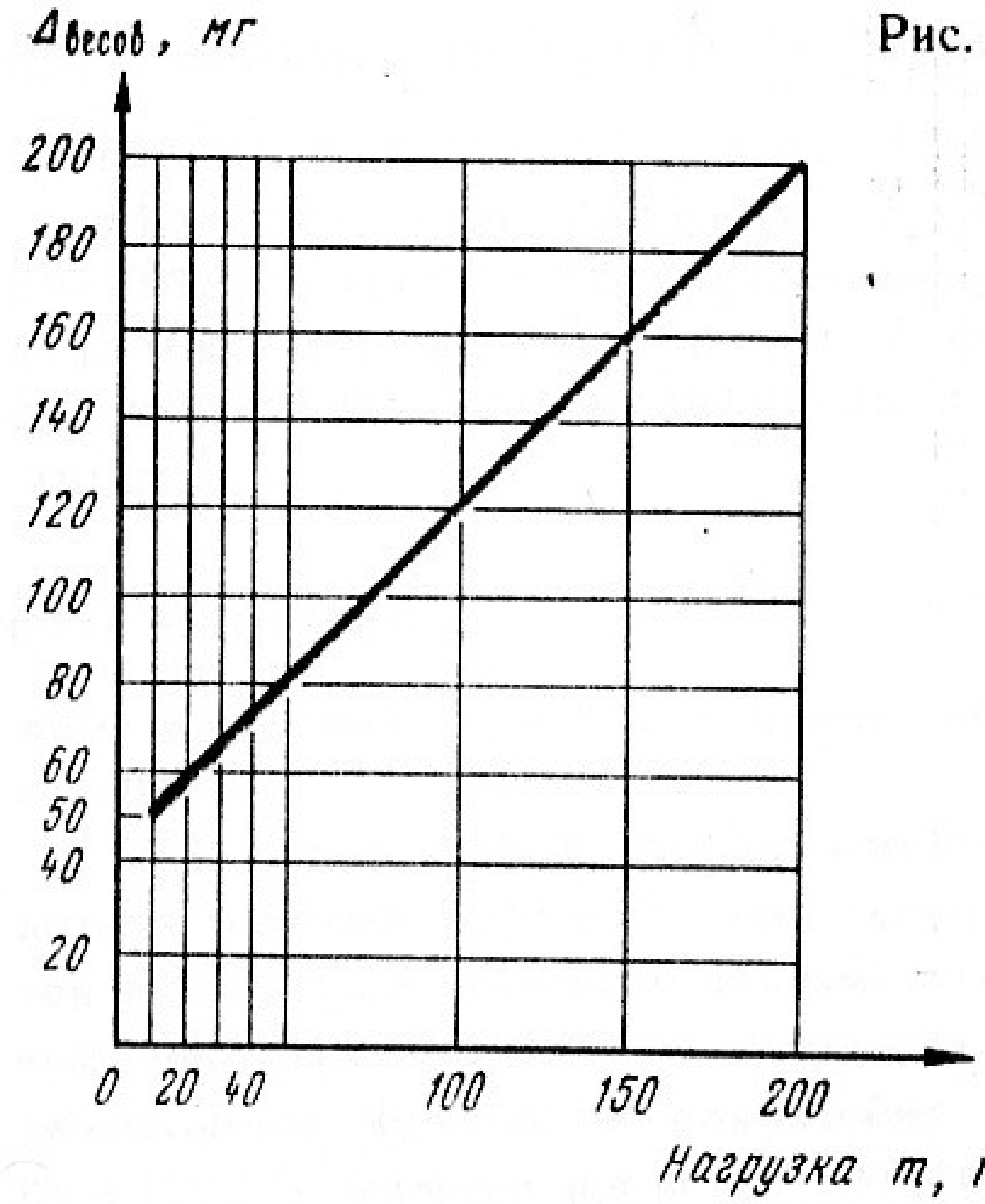
График зависимости погрешности весов от нагрузки приведен на рисунке 9.5, а погрешности гирь набора Г4-211 для лабораторных работ приведены в таблице 6.

**Погрешность прямых однократных измерений.** При проведении прямых однократных измерений поступают следующим образом: за результат измерения принимается значение, соответствующее ближайшему к указателю штриху шкалы, а граница погрешности равна $\Delta=\Delta_{пр}+\Delta_{отсч}$. Обе составляющие погрешности прямого измерения следует учитывать лишь в том случае, если они близки друг к другу. Любым из этих слагае-

Таблица 6

| Погрешность гирь | |
|---|---|
| номинальное значение | погрешность |
| 10 мг; 20 мг<br>50 мг; 100 мг | ±1 мг |
| 200 мг<br>500 мг<br>1 г<br>5 г<br>10 г | ±2 мг<br>±3 мг<br>±4 мг<br>±8 мг<br>±12 мг |
| 20 г<br>50 г<br>100 г | ±20 мг<br>±30 мг<br>±40 мг |

Рис. 9.5




мых можно пренебречь, если оно не превосходит 1/3—1/4 от другого. В этом состоит так называемое правило «ничтожных погрешностей».

Хорошие измерительные приборы обычно градуируют так, что погрешность отсчета меньше погрешности прибора, так что учитывается только приборная погрешность. Однако в школьных приборах часто встречаются также случаи, когда необходимо учесть оба слагаемых.

## ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**75.1. Напряжение измеряется вольтметром с пределом измерения $U_{max}=6$ В. Класс точности вольтметра $\gamma=2{,}5$, цена деления $c=0{,}2$ В. Определите основную погрешность вольтметра.**

**Чему равны абсолютная и относительная погрешности измерения напряжения, равного 3,8 В?**

**75.2. Тело уравновешено на весах при помощи гирь, номинальные значения которых равны 50 г, 20 г, 100 мг, 10 мг. Определите массу тела, абсолютную и относительную погрешности измерения массы, если взвешивание проводилось на лабораторных весах с использованием набора гирь Г4-211.**

## § 76. ПОГРЕШНОСТИ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

**Простейшие правила для погрешностей.** В большинстве случаев измерения являются *косвенными*, когда результат определяется на основе расчетов. Так, например, определяется электрическое сопротивление $\left(R=\frac{U}{I}\right)$, импульс ($p=mv$), работа ($A=Fs$) и т. п. Легко получить два простейших правила, по-

Таблица 7

| Вид функции | Абсолютная погрешность | Относительная погрешность | Уточненные формулы |
|---|---|---|---|
| $f=x\pm y$ | $\Delta f=\Delta x+\Delta y$ | $\varepsilon_f=\dfrac{\Delta x+\Delta y}{x\pm y}$ | $\Delta f=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ |
| $f=xy$ | $\Delta f=x\cdot\Delta y+y\cdot\Delta x$ | $\varepsilon_f=\varepsilon_x+\varepsilon_y$ | $\varepsilon_f=\sqrt{\varepsilon_x^2+\varepsilon_y^2}$ |
| $f=x/y$ | $\Delta f=(x\cdot\Delta y+y\cdot\Delta x)/y^2$ | | |
| $f=x^n$ | $\Delta f=nx^{n-1}\Delta x$ | $\varepsilon_f=n\varepsilon_x$ | — |
| $f=\sqrt[n]{x}$ | $\Delta f=\dfrac{\Delta x}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ | $\varepsilon_f=\dfrac{1}{n}\varepsilon_x$ | — |
| $f=\sin x$ | $\Delta f=\cos x\cdot\Delta x$ | $\varepsilon_f=\mathrm{ctg}\, x\Delta x$ | — |
| $f=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ | $\Delta f=\dfrac{\Delta x}{x^2}+\dfrac{\Delta y}{y^2}$ | $\varepsilon_f=\dfrac{\Delta x/x^2+\Delta y/y^2}{1/x+1/y}$ | $\Delta f=\sqrt{\left(\dfrac{\Delta x}{x^2}\right)^2+\left(\dfrac{\Delta y}{y^2}\right)^2}$ |

зволяющих определить погрешность косвенных измерений:

1) если $f=xy$ или $f=\frac{x}{y}$,

то

$$\varepsilon_f=\varepsilon_x+\varepsilon_y; \qquad (76.1)$$

2) если $g=x\pm y$,

то

$$\Delta g=\Delta x+\Delta y. \qquad (76.2)$$

Для доказательства рассмотрим, например, случай $f=xy$. Тогда $\Delta f=(x+\Delta x)(y+\Delta y)-xy=(xy+\Delta x\times \times y+x\cdot\Delta y+\Delta x\cdot\Delta y)-xy=\Delta x\cdot y+ +x\cdot\Delta y-\Delta x\Delta y$.

В этой сумме произведением $\Delta x\Delta y$ по сравнению с величиной $(\Delta x\cdot y+ +\Delta y\cdot x)$ можно пренебречь. Следовательно, $\Delta f=\Delta y\cdot x+\Delta x\cdot y$.

Относительная погрешность

$$\varepsilon=\frac{\Delta f}{f}=\frac{x\cdot\Delta y+y\cdot\Delta x}{xy}=\frac{\Delta y}{y}+\frac{\Delta x}{x}= =\varepsilon_y+\varepsilon_x.$$

Если $g=x+y$, то $\Delta g=|(x+\Delta x)+ +(y+\Delta y)|-(x+y)=\Delta x+\Delta y$. Применение этих простейших правил помогает найти погрешность в более сложных случаях. Например, пусть $f=x^3=xxx$. Следовательно, $\varepsilon_f=\varepsilon_x+ +\varepsilon_x+\varepsilon_x=3\varepsilon_x$.

Таким образом, для наиболее распространенной в школьной практике функции вида $f=A\frac{x^ny^m}{z^k}=Ax^ny^mz^{-k}$ можно написать: $\varepsilon_f=n\varepsilon_x+m\varepsilon_y+k\varepsilon_z$.

Рассмотрим пример. Пусть измеряется удельное сопротивление. Тогда $R=\frac{U}{I}$ и $R=\rho\frac{l}{S}$. Если проводник имеет цилиндрическую форму, то $\rho=\frac{US}{Il}=\frac{\pi d^2U}{4Il}$. Относительная погрешность $\varepsilon_\rho=\varepsilon_U+ +\varepsilon_I+\varepsilon_\pi+2\varepsilon_d+\varepsilon_l=\frac{\Delta U}{U}+\frac{\Delta I}{I}+\frac{\Delta\pi}{\pi}+ +2\frac{\Delta d}{d}+\frac{\Delta l}{l}$.

Следует иметь в виду, что прямое использование указанных правил не всегда позволяет найти погрешность косвенных измерений.

Приведем пример. Пусть $f=\frac{A+B}{A}$, тогда $\varepsilon_f=\varepsilon_{A+B}+\varepsilon_A=$ $=\frac{\Delta A+\Delta B}{A+B}+\frac{\Delta A}{A}$. Если, однако, сначала выполнить алгебраические преобразования, то $f=1+\frac{B}{A}$. Отсюда получается, что $\varepsilon_f=\varepsilon_B+\varepsilon_A$.

Поэтому при сложных случаях расчета погрешности косвенных измерений целесообразно пользоваться формулами, приведенными в таблице 7.

## ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**76.1. Оцените относительную и абсолютную погрешности измерения удельного сопротивления, если диаметр проволоки равен $d=(0,8\pm0,1)$ мм, ее длина $l=(100,0\pm0,5)$ см. Сила тока и напряжение измеряются приборами с классом точности $\gamma=2,5$. Сила тока равна 1,3 А и измеряется амперметром с пределом измерения $I_м=2$ А и ценой деления $c_1=0,1$ А. Напряжение равно 6,0 В и измеряется вольтметром с пределом измерения $U_м=8$ В и ценой деления $c_2=0,2$ В.**

**76.2. Через слабый раствор серной кислоты в течение $(12,0\pm0,5)$ мин пропускали ток $(1,2\pm0,1)$ А. Найдите объемы и массы выделившихся водорода и кислорода, если температура воздуха в помещении равна $(20\pm1)$ °С, а давление равно $(100\,000\pm400)$ Па. Оцените погрешность измерения массы кислорода.**

## § 77. СЛУЧАЙНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ

**Повторные измерения.** Часто при проведении повторных измерений какой-либо величины получаются несколько различные результаты, отличающиеся друг от друга больше, чем сумма погрешностей прибора и отсчета. Это вызвано действием случайных факторов, которые невозможно устранить в процессе эксперимента. Так, например, при измерении диаметра цилиндрического проводника микрометром разные показания возникают вследствие того, что при изготовлении проводника его диаметр в разных местах оказался разным, да и форма его не строго цилиндрическая. На уравновешивание весов влияет трение коромысла на оси. При измерении токов и напряжений на результаты влияет нестабильность напряжения в сети и т. д. Погрешности такого рода называют *случайными*.

Если появляются случайные погрешности, то для их учета следует измерения повторить несколько раз и за результат измерения принять среднее арифметическое результатов отдельных измерений. Пусть проведено $n$ измерений и получены числовые значения измеряемой величины $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$; тогда за результат измерения принимается среднее арифметическое значение результатов отдельных измерений:

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i. \qquad (77.1)$$

**Граница случайной погрешности.** *Но и среднее арифметическое, вообще говоря, не совпадает с истинным* значением измеряемой величины. Как же найти границу интервала, в котором находится истинное значение? Эта граница называется *границей случайной погрешности.*

Средняя квадратичная погрешность отдельного измерения выражается формулой:

$$s=\sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2}{n-1}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum \Delta x_i^2}. \qquad (77.2)$$

Эта величина при достаточно большом числе опытов имеет простой вероятностный смысл. Граница случайной погрешности каждого опыта серии $x_1$, $x_2$, $x_3$, ..., $x_n$ не превышает $3s$, т. е. $\Delta x \leqslant 3s$.

Это означает, что если провести еще один опыт, то мы можем гарантировать, что этот результат окажется в интервале $[\bar{x} \pm 3s]$.

При проведении 10 и более опытов с надежностью, близкой к 99%, можно считать, что граница случайной погрешности каждого опыта серии не превосходит утроенного значения средней квадратичной погрешности, т. е. $\Delta x \leqslant 3s$.

**Погрешность среднего арифметического.** Когда мы находим среднее арифметическое значение величины по результатам серии опытов, то естественно считать, что оно имеет меньшее отклонение от истинного значения, чем каждый опыт серии. Другими словами, погрешность среднего меньше, чем погрешность каждого опыта серии. В теории погрешностей доказывается, что средняя квадратичная ошибка среднего арифметического равна:

$$\bar{s}=\frac{s}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2}. \qquad (77.3)$$

Таким образом, граница случайной погрешности среднего арифметического с надежностью 99% не превышает величину

$$\Delta x \leqslant 3\bar{s} \leqslant \frac{3s}{\sqrt{n}}. \qquad (77.4)$$

Приведем пример. Пусть шарик брошен горизонтально (рис. 9.6); дальность его полета в опытах приведена в таблице 8.

Таблица 8

| $l$, мм | $l_{ср}$, мм | $\Delta l$, мм | $\Delta l_{кв}$, мм |
|---|---|---|---|
| 250 | | 3 | |
| 245 | | 8 | |
| 262 | 253 | 9 | 6,3 |
| 248 | | 5 | |
| 260 | | 7 | |
| 256 | | 3 | |
| 250 | | 3 | |
| 245 | | 8 | |
| 253 | | 0 | |
| 260 | | 7 | |

Средняя квадратичная погрешность равна

$$s=\sqrt{\frac{3^2+8^2+9^2+5^2+7^2+3^2+3^2+8^2+7^2}{9}}\text{ мм}=$$

$$=6{,}3 \text{ мм}.$$

Граница среднего арифметического в соответствии с (77.4) будет равна:

$$\Delta l=\frac{3s}{\sqrt{n}}=6{,}0 \text{ мм}.$$

Из формулы $\bar{s}=\frac{s}{\sqrt{n}}$ следует, что граница случайной погрешности среднего стремится к нулю при увеличении числа опытов в серии. Это не значит, однако, что можно проводить абсолютно точные измерения: ведь приборы, с помощью которых мы

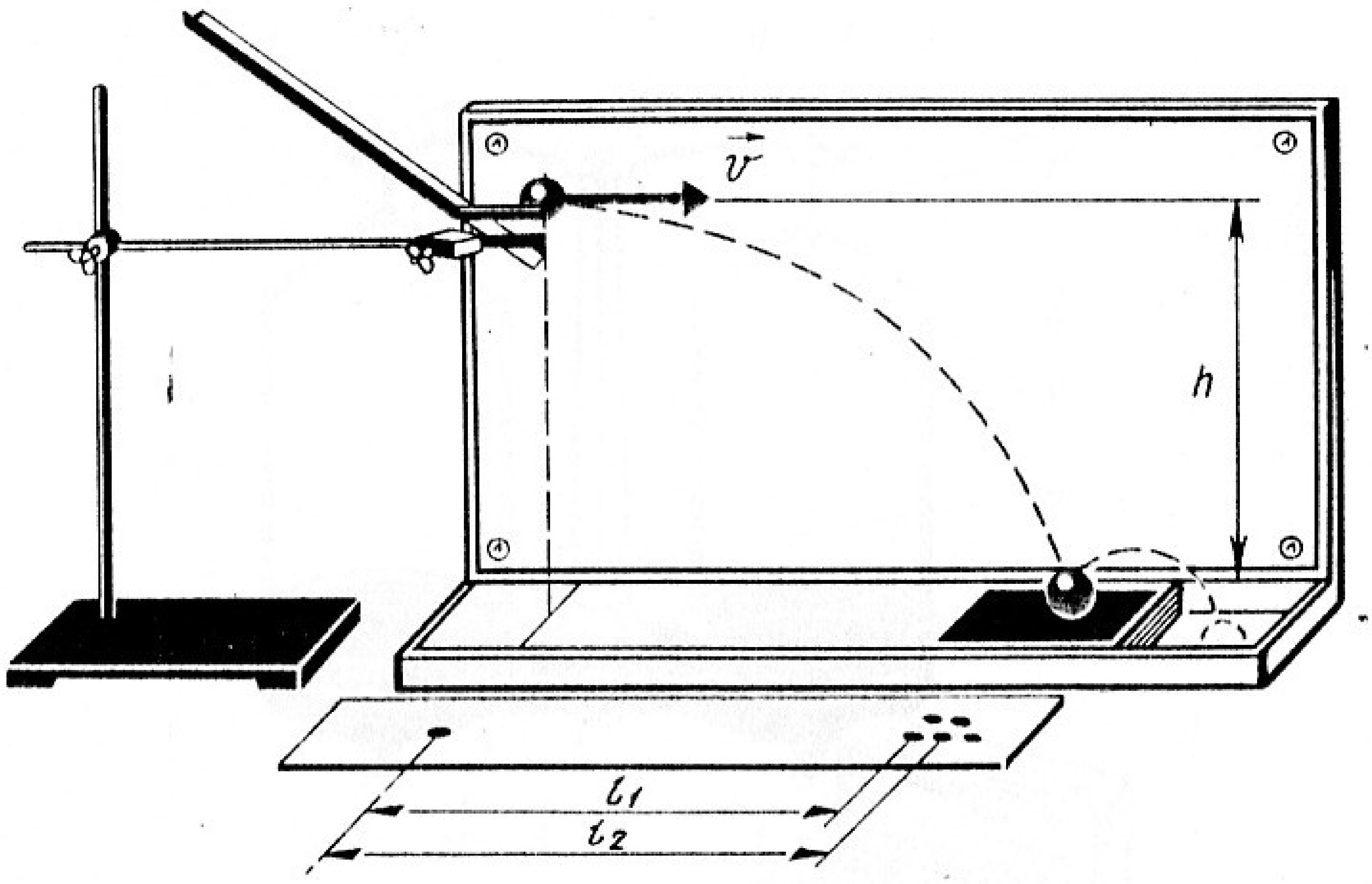


Рис. 9.6

получили результаты, также имеют погрешности. Поэтому погрешность среднего при бесконечном увеличении числа опытов стремится к погрешности прибора.

Очевидно, что число опытов имеет смысл выбрать таким, чтобы случайная погрешность среднего сравнялась с погрешностью прибора либо стала меньше ее. Дальнейшее увеличение числа измерений теряет смысл, так как не увеличит точность получаемого результата.

**Систематические погрешности.** Необходимо иметь в виду, что во всех наших оценках границ погрешностей мы не учли, что существуют так называемые *систематические погрешности*. Эти погрешности возникают из-за влияния измерительного прибора на процессы в измерительной установке; недостаточной корректности методики измерения; неправильных показаний прибора, например из-за первоначального смещения стрелки прибора от нулевого деления шкалы, и по другим причинам. В школьном эксперименте устранить систематические погрешности очень трудно.

## ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

77.1. Время некоторого процесса измерялось секундомером с погрешностью $\Delta_c = 0{,}01$ с. В серии из десяти опытов получены следующие результаты: 89,56 с; 89,54 с; 89,50 с; 89,60 с; 89,58 с; 89,50 с; 89,62 с; 89,48 с; 89,60 с; 89,62 с. Определите среднее значение времени процесса, погрешность каждого опыта серии и погрешность среднего значения времени.

77.2. В лабораторной работе по измерению ускорения свободного падения с использованием маятника ученик измерял время малых колебаний маятника длиной $l = (1{,}50 \pm 0{,}01)$ м при помощи секундомера с основной погрешностью $\Delta_c = 0{,}01$ с. В сериях из десяти опытов по измерению времени были получены следующие результаты (в секундах): 73,70; 73,68; 73,74; 73,76; 73,64; 73,60; 73,70; 73,60; 73,70; 73,74. По этим данным оцените интервал, содержащий истинное значение ускорения свободного падения, и проверьте, являются ли измерения достоверными, если его значение для данной местности равно $g_0 = 9{,}8156$ м/с$^2$.